



ce
pre
UNI

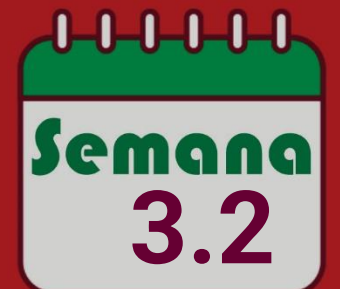
CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

Álgebra

TEMA

**ECUACION DE PRIMER GRADO Y
ECUACION CUADRÁTICA**



ECUACIONES LINEALES

Una ecuación lineal en variable x , es una expresión algebraica de la siguiente forma estándar $ax = b$ (*)

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 01

$$5x + 3 = 4(x + 3)$$

$$3(x + 1) = 2(x - 2)$$

$$\frac{2x + 4}{5} = \frac{x - 1}{3}$$

$$\frac{x + 4}{3} - 2(x - 5) = -5 \left(\frac{x}{15} - \frac{2}{5} \right)$$

$$\frac{2(x - 1)}{3} - 3 \left(x - \frac{1}{4} \right) = 2 \left(\frac{x - 5}{3} \right)$$

Resolver una ecuación consiste en hallar todos los valores de la variable que verifican la igualdad.

ECUACIONES LINEALES

Una ecuación lineal en variable x , es una expresión algebraica de la siguiente forma estándar $ax = b$ (*)

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Observaciones

(1) Si $a \neq 0$, (*) tiene solución única, C. S. = $\left\{ \frac{b}{a} \right\}$

En este caso (*) se denomina **ecuación de primer grado**

(2) Si $a = b = 0$, (*) tiene infinitas soluciones, C. S. = $\mathbb{R}$

En este caso (*) se denomina ecuación indeterminada

(3) Si $a = 0 \wedge b \neq 0$, (*) no tiene solución, C. S. = $\emptyset$

Ejemplo 02

Resolver

$$(a) \quad -7x + \frac{-2x - 10}{4} = 3x$$

$$(b) \quad 2x - 8 + \frac{1 - x}{6} = 6x - \frac{5}{8} - 2$$

$$(c) \quad 2x - 1 = 3x + 3 - x - 4$$

$$(d) \quad \frac{3(x - 1)}{2} + 4x = \frac{11x - 3}{2}$$

$$(e) \quad 3x - 2 + x = 5x + 1 - x$$

$$(f) \quad \frac{5x + 1}{2} - \frac{3x}{4} - x = \frac{3}{4}(x - 1)$$

Ejemplo 03

En una familia, el padre gana 16 soles por hora y la madre 15 soles por hora. Al cabo de 26 días de trabajo el padre recibió 1456 soles más que la madre, dado que laboró 3 horas más por día que ella. ¿Cuántas horas de trabajo acumuló el padre?

A) 154

B) 286

C) 234

D) 260

E) 312

Resolución

Sea x : Número de horas de trabajo al día de la madre

Según el enunciado

$$26(15)(x) + 1456 = 26(16)(x + 3)$$

$$26(15)(x) + 26(56) = 26(16)(x + 3)$$

$$15x + 56 = 16(x + 3), \quad x = 8$$

Piden $26(x + 3) = 26(8 + 3) = 286$ horas de trabajo

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Definición: Una ecuación de segundo grado o cuadrática es aquella que tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y x es la variable.

Métodos de resolución

Las ecuaciones cuadráticas usualmente son resueltas por:

1. Aspa Simple
2. Completando cuadrados
3. Fórmula General

FÓRMULA GENERAL

La ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Luego de completar cuadrados obtenemos como raíces a :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si definimos el **discriminante** como $\Delta = b^2 - 4ac$

Obtendremos como **Conjunto solución**

$$\text{C. S.} = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación $x^2 - 2x - 15 = 0$

Solución

Primera forma: Factorizando

Aplicando aspa simple obtenemos

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\begin{array}{cc} x & -5 \\ x & 3 \end{array}$$

$$(x - 5)(x + 3) = 0$$

De donde las soluciones son

$$x = 5 \vee x = -3$$

$$CS = \{5, -3\}$$

Segunda forma: Completando Cuadrados

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 15 = 0 \quad (\text{Sumamos y restamos 1})$$

$$(x - 1)^2 - 16 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 16$$

$$x - 1 = 4 \vee x - 1 = -4$$

$$x = 5 \vee x = -3$$

$$CS = \{5, -3\}$$

La ecuación tiene por raíces a 5 y -3

Tercera forma: Fórmula general

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Identificando los coeficientes

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -15$$

Luego el discriminante será

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-15) = 64$$

Reemplazando en la fórmula general

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{64}}{2(1)} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{64}}{2(1)} = -3$$

$$CS = \{5, -3\}$$

Nota.-

1. Nótese que hemos resuelto la misma ecuación por tres métodos diferentes y la respuesta siempre es la misma.
2. Las raíces no necesariamente son números enteros o reales.
3. Puede ocurrir que las raíces sean iguales $x_1 = x_2$ en cuyo caso diremos que solo hay una solución.



NATURALEZA DE LAS RAÍCES

Para la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ de **coeficientes reales**, con $\Delta = b^2 - 4ac$.

Según el valor del discriminante se obtiene:

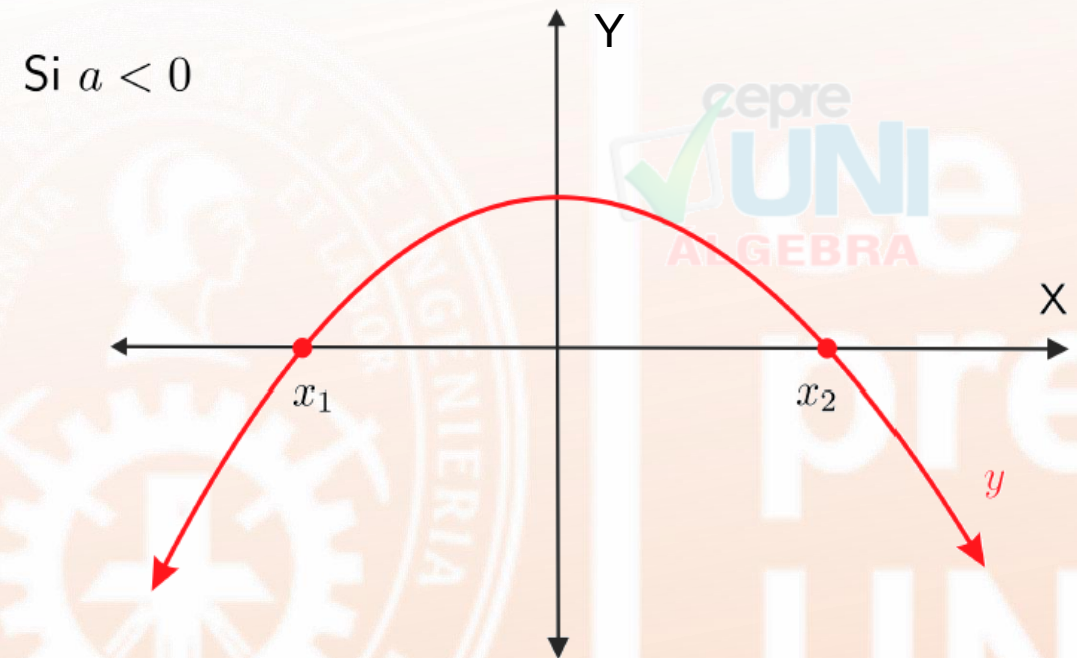
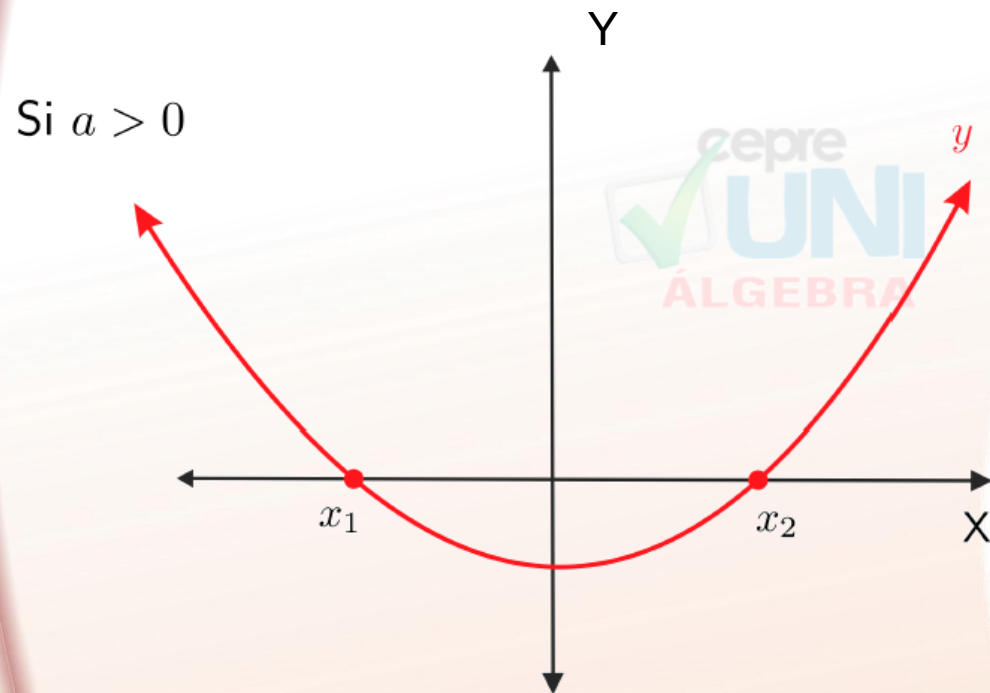
- i) Si $\Delta > 0$, las raíces son reales y diferentes. Tiene dos soluciones reales.
- ii) Si $\Delta = 0$, las raíces son reales e iguales. Tiene una solución real.
- iii) Si $\Delta < 0$, las raíces no son reales. Tiene dos soluciones no reales (soluciones complejas).

Ejemplos:

1. La ecuación $x^2 - 2x - 15 = 0$ tiene $\Delta > 0$ por lo que podemos afirmar que: Tiene dos soluciones reales.
Tiene dos raíces reales y diferentes.
2. La ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$ tiene una solución real ya que $\Delta = 0$.
3. La ecuación $x^2 - 2x + 8 = 0$ tiene dos soluciones no reales ya que $\Delta < 0$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA SEGÚN SEA EL DISCRIMINANTE

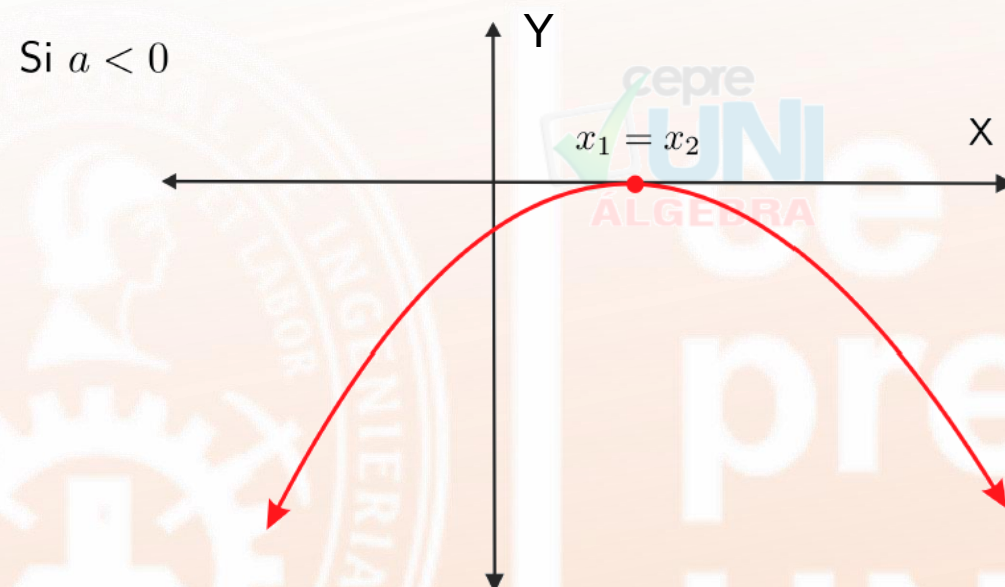
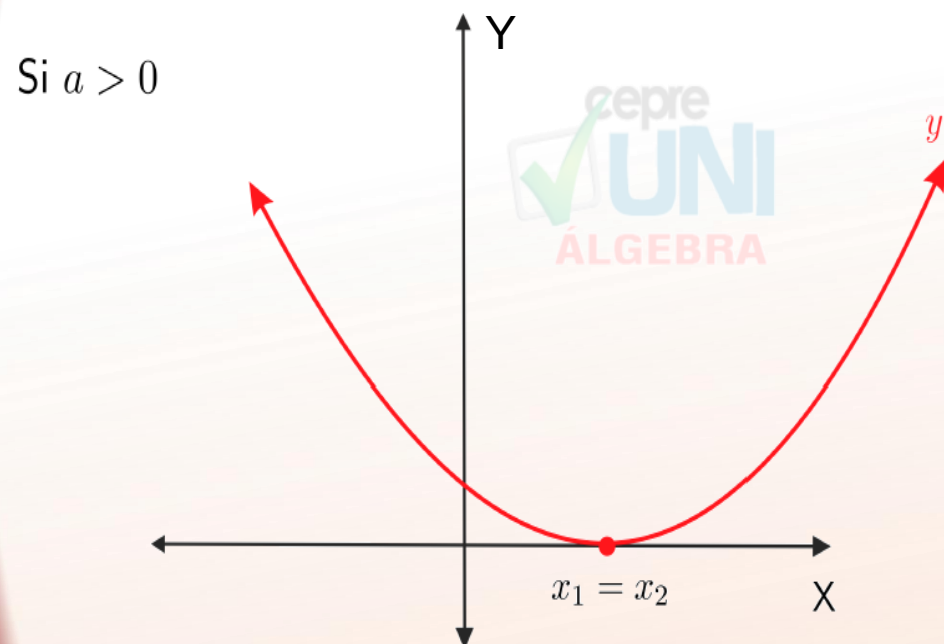
Para $y = ax^2 + bx + c$ tendremos.



Cuando $\Delta > 0$; la gráfica interseca al eje X en dos puntos distintos ($x_1 \neq x_2$).

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

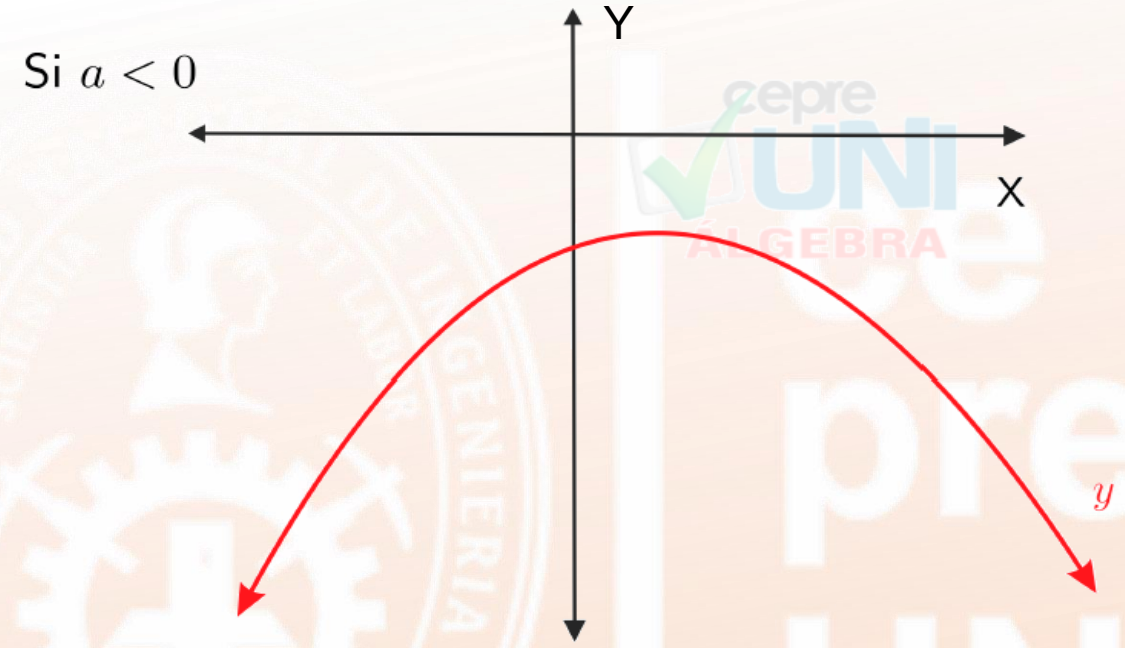
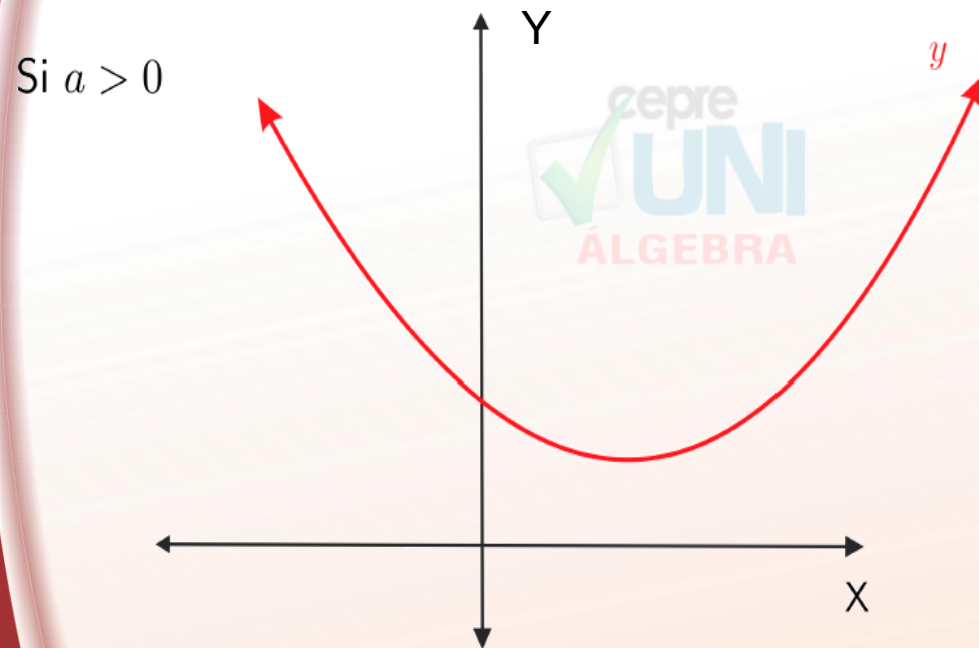
Para $y = ax^2 + bx + c$ tendremos.



Cuando $\Delta = 0$; la gráfica es tangente al eje X, “toca” al eje X en un punto ($x_1 = x_2$).

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

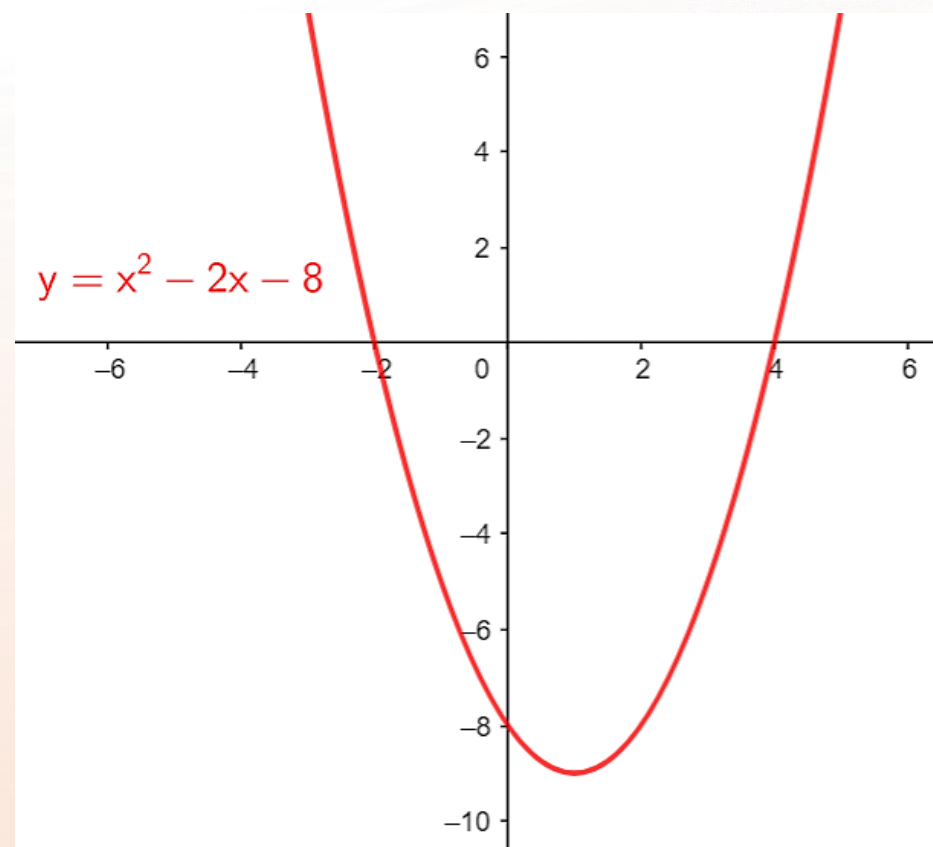
Para $y = ax^2 + bx + c$ tendremos.



Cuando $\Delta < 0$; la gráfica no interseca al eje X ya que no hay raíces reales.

Ejemplo

La ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$ tiene $\Delta > 0$ por lo que la función asociada $y = x^2 - 2x - 8$ tendrá por gráfica a una parábola que intercepta al eje X en dos puntos los cuales son sus raíces.



PROPIEDADES

Para la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde x_1, x_2 son raíces de la ecuación, tendremos:

1) Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2) Producto de raíces:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

3) Diferencia de raíces:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 x_2$$

4) Reconstrucción de la ecuación conociendo las raíces x_1 y x_2 :

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

ECUACIONES CUADRÁTICAS EQUIVALENTES

Si las ecuaciones de coeficientes no nulos $ax^2 + bx + c = 0$ y $mx^2 + nx + r = 0$ son equivalentes, entonces

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{r}$$

Ejemplo

Las ecuaciones $x^2 - 2x - 3 = 0$ y $2x^2 - 4x - 6 = 0$ son equivalentes ya que

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{-3}{-6}$$

y en ambos casos obtenemos C.S. = $\{3; -1\}$

ECUACIÓN BICUADRADA

Definición: Una ecuación bicuadrada es de la forma siguiente:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y x es la variable.

Una forma de hallar la solución de la ecuación, es aplicar el cambio $z = x^2$, esto implica que la ecuación se reduce a la forma:

$$az^2 + bz + c = 0$$

Ahora es una ecuación cuadrática y se puede resolver con alguno de los métodos planteados.

Haciendo el cambio $z = x^2$ a la ecuación bicuadrada y aplicando la fórmula general se obtiene las raíces:

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} & x_2 &= -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \\x_3 &= \sqrt{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} & x_4 &= -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}\end{aligned}$$

Conjunto solución de una Bicuadrada

En general si hacemos $x_1 = \alpha$ y $x_3 = \beta$ en las raíces anteriores obtendremos que:

$$C.S. = \{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$$

Segunda prueba calificada 2020-1

En la ecuación bicuadrada siguiente:

$$(a - 13)x^{\frac{a}{2}-3} + (b - a)x^{\frac{b}{3}-1} + b = 0$$

Se cumple que $3a - 2b > 12$.

Si x_1, x_2, x_3, x_4 son sus raíces, halle el valor de

$$T = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$$

- | | |
|-------|-------|
| A) 9 | D) 23 |
| B) 12 | E) 41 |
| C) 14 | |

PROPIEDADES

Sea la ecuación bicuadrada:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Donde $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$ son raíces de dicha ecuación. Tendremos:

1) Suma de los cuadrados de las raíces: $\alpha^2 + \beta^2 = -\frac{b}{a}$

2) Producto de raíces: $\alpha^2 \beta^2 = \frac{c}{a}$

3) Reconstrucción de una bicuadrada conociendo las raíces no simétricas α y β :

$$x^4 - (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + \alpha^2 \beta^2 = 0$$

ECUACIÓN RECÍPROCA

Definición: Una ecuación recíproca es de la forma siguiente:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ y x es la incógnita, además si r es solución de la ecuación, entonces $\frac{1}{r}$ también es solución de dicha ecuación.

Teorema

Una condición necesaria y suficiente para que una ecuación sea recíproca, es que los coeficientes equidistantes de los extremos de la ecuación sean iguales o simétricos (sumen cero).

TIPOS DE ECUACIÓN RECÍPROCA

1) **Primera clase o primera especie.** Es aquella ecuación recíproca en que los coeficientes equidistantes de los extremos de la ecuación son iguales.

Ejemplos:

$$1) \quad 6x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 6 = 0$$

$$2) \quad 2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$$

Teorema

Toda ecuación recíproca de primera especie de grado impar tiene como raíz a -1.

2) **Segunda clase o segunda especie.** Es aquella ecuación recíproca en que los coeficientes equidistantes de los extremos de la ecuación son simétricos.

Ejemplos:

$$1) 2x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$2) 4x^3 + 5x^2 - 5x - 4 = 0$$

Teorema

Toda ecuación recíproca de segunda especie de grado impar tiene como raíz al 1.

Las ecuaciones recíprocas de grado par, pueden resolverse mediante el cambio

$$x + \frac{1}{x} = z$$

Lo cual permite disminuir el grado de la ecuación.

Ejemplo

Indique el número de soluciones reales de la ecuación

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

Solución

Nótese que es una ecuación recíproca de grado par, por lo que usaremos la nota indicada líneas arriba.

Dividiendo entre x^2

$$x^2 - 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

Agrupando

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

Haciendo el cambio $x + \frac{1}{x} = z$

$$z^2 - 2z - 3 = 0$$

De donde $z = 3 \vee z = -1$ por lo que

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad \vee \quad x + \frac{1}{x} = -1$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 + x + 1 = 0$$

Pero en ambos casos $\Delta < 0$ por lo que la ecuación

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

No tiene soluciones reales.

Segunda prueba calificada 2018-1

Dada la ecuación recíproca

$$x^4 + (a + 1)x^2 - ax^3 - ax + 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

Halle los valores de a para que sus cuatro raíces no sean reales.

A) $a \in \langle -1; 3 \rangle$

B) $a \in [-1; 1]$

C) $a \in [-3; 1]$

D) $a \in \mathbb{R}^*$

E) $a \in \mathbb{R} - \langle -1; 3 \rangle$